



Олександр ПЛЮЩ, д-р техн. наук, доц.  
ORCID ID: 0000-0001-5310-0660  
e-mail: [oleksandr.pliushch@knu.ua](mailto:oleksandr.pliushch@knu.ua)  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Юрій КРАВЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.  
ORCID ID: 0000-0002-0281-4396  
e-mail: [yurii.kravchenko@knu.ua](mailto:yurii.kravchenko@knu.ua)  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олександр ТРУШ, канд. техн. наук, доц.  
ORCID ID: 0000-0002-4188-2850  
e-mail: [oleksandr.trush@knu.ua](mailto:oleksandr.trush@knu.ua)  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

## РЕКУРЕНТНИЙ АЛГОРИТМ ПРОЄКТУВАННЯ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ СИСТЕМ І МЕРЕЖ

**Вступ.** Для проєктування й розрахунку телекомунікаційних систем і мереж широко використовують першу формулу Ерланга, яка встановлює зв'язок вірогідності відмови в обслуговуванні з інтенсивністю навантаження в певному напрямку зв'язку і наявною кількістю каналів у цьому напрямку. У багатьох застосуваннях виникає задача винайдення потрібної кількості каналів у певному напрямку зв'язку для певної інтенсивності навантаження для задоволення заданої вірогідності відмови.

**Методи.** Використано методи імітаційного комп'ютерного моделювання й аналізу складних систем.

**Результати.** Зважаючи на те, що кількість каналів входить у першу формулу Ерланга, по-перше, як верхній індекс додавання, по-друге, показник експоненти, по-третє, під знаком факторіала, розв'язання поставленої задачі є можливим графічним методом. Цей метод полягає в отриманні значень вірогідності відмови для певного діапазону кількості каналів для винайдення найменшої кількості каналів, за якої вірогідність відмови знижується нижче певного рівня. В роботі показано, що для великих значень кількості каналів й інтенсивності навантаження пряме використання першої формули Ерланга на ЕОМ приводить до швидкого переповнення розрядної сітки і до неможливості виконувати потрібні обчислення. Для подолання проблеми запропоновано рекурентний алгоритм розв'язання поставленої задачі, який отримується з першої формули Ерланга і завдяки своїй структурі не має вказаних обмежень у разі використання на ЕОМ.

**Висновки.** Результати досліджень запропонованого алгоритму демонструють його високу ефективність у програмуванні в середовищі Matlab. Зважають, що алгоритм може знайти широке застосування для проєктування телекомунікаційних мереж і систем.

**Ключові слова:** телекомунікаційна мережа, перша формула Ерланга, рекурентний алгоритм, Matlab.

### Вступ

Удосконалення технологій передачі й оброблення інформації в телекомунікаційних системах і мережах визначає рівень розвитку останніх. Невід'ємною частиною цієї тенденції є процес розвитку методів аналізу і проєктування телекомунікаційних мереж (Степков, & Беркман, 2002; Гольдштейт, Соколов, & Яновський, 2010; Алієв, 2011). Мережі зв'язку постають як один із найважливіших елементів сучасного життя, і від їхнього функціонування залежать практично всі процеси й відносини в суспільстві. З огляду на це до стану мереж телекомунікацій і їхнього рівня розвитку висувують особливі вимоги.

У проєктуванні та розрахунку телекомунікаційних мереж широко використовують першу формулу Ерланга (В-формула Ерланга), яка встановлює для певного напрямку зв'язку відношення між вірогідністю відмови в наданні обслуговування з інтенсивністю навантаження в цьому напрямку зв'язку і наявною кількістю в ньому каналів (Давидов, Смирнов, & Парамонов, 2016а; Соколов, & Яновський, 2010). За наявності (визначеності) двох із показників завжди можна розрахувати третій. Дуже часто виникає задача винайдення потрібної кількості каналів у напрямку зв'язку (лінії зв'язку) за певної інтенсивності навантаження для задоволення третього показника якості у вигляді вірогідності відмови (скинутих викликів) (Давидов, Смирнов, & Парамонов, 2016b; Лівшиць, Пшенічников, & Харкевіч, 1979; Клейнрок, 1979). Для цього застосування не існує аналітичного розв'язання задачі, оскільки кількість каналів входить у першу формулу Ерланга, по-перше, як верхній індекс додавання, по-друге, показник степеневі функції, по-третє, під знаком факторіала. В цьому випадку розв'язати поставлену задачу можна графічним методом.

Зазначений метод полягає в отриманні значень вірогідності відмови для певного діапазону кількості каналів для винайдення найменшої кількості каналів, для якої вірогідність відмови знижується нижче певного рівня. Як впливає з прямого застосування першої формули Ерланга, у процесі розрахунків у середовищі Matlab для великих значень кількості каналів й інтенсивності навантаження відбувається швидке переповнення розрядної сітки комп'ютера й отримання потрібних даних стає неможливим.

З огляду на це є актуальною задача винайдення альтернативного шляху обчислення на комп'ютері вірогідності відмови в обслуговуванні для великих значень інтенсивності навантаження та кількості каналів.

**Постановка задачі.** Добре відома і широко використовувана перша формула Ерланга обчислює значення для вірогідності відмови в обслуговуванні (скинутих викликів) залежно від інтенсивності навантаження і кількості каналів обслуговування та має такий вигляд (Зелігер, Чугреєв, & Яновський, 1984; Алієв, 2011):

$$P_n = \frac{y^n / n!}{\sum_{j=0}^n y^j / j!}, \quad (1)$$

де  $P_n$  – вірогідність відмови в обслуговуванні для  $n$  каналів;  $y$  – інтенсивність навантаження (Ерл.);  $n$  – кількість каналів.

© Плющ Олександр, Кравченко Юрій, Труш Олександр, 2023



Аналіз формули (1) дозволяє встановити, що за її використання можливі певні труднощі, які пов'язані з тим, що кількість каналів у ній фігурує як показник ступеня інтенсивності навантаження, міститься під знаком факторіала й виступає як найбільше значення індексу суми. З огляду на те, що в реальних напрямках зв'язку як інтенсивність навантаження, так і кількість каналів можуть сягати тисячі одиниць, слід очікувати перепоповнення розрядної сітки комп'ютера й отримання хибного результату. Для перевірки цього припущення, використаємо наявні у джерелах інформації результати розрахунку кількості каналів у мережі зв'язку за допомогою (1) для відомих значень вірогідності відмов та інтенсивності навантаження, які наведені в таблиці у роботі (Давидов, Смирнов, & Парамонов, 2016b).

Як впливає з таблиці, навіть у простих ситуаціях значення інтенсивності навантаження може сягати 800 Ерл., так само як і відповідні кількості каналів. Для перевірки можливості проведення обчислення (1) на комп'ютері за великих значень зазначених показників використаємо середовище Matlab, а як референтні візьмемо дані з таблиці.

Таблиця

Розрахунок кількості каналів для заданих інтенсивності навантаження та вірогідності відмов

Ділянка зв'язку	Інтенсивність навантаження, Ерл.	Вірогідність відмов, %	Кількість каналів
1	98,0	0,0008	127
2	237,5	0,0008	279
3	800,0	0,0008	869
4	450,0	0,0008	504
5	3,4	0,0002	12
6	12,5	0,0002	27
7	50,3	0,01	64
8	187,5	0,01	209
9	211,4	0,01	233
10	787,5	0,01	816
11	70,4	0,01	86

Проведемо обчислення з прямим використанням формули (1) і стандартних функцій обчислення ступеня і факторіала з подвійною точністю, що наявні в Matlab.

Першим розглянемо рядок 5 із таблиці. Результати обчислення для цього випадку зображено на рис. 1.

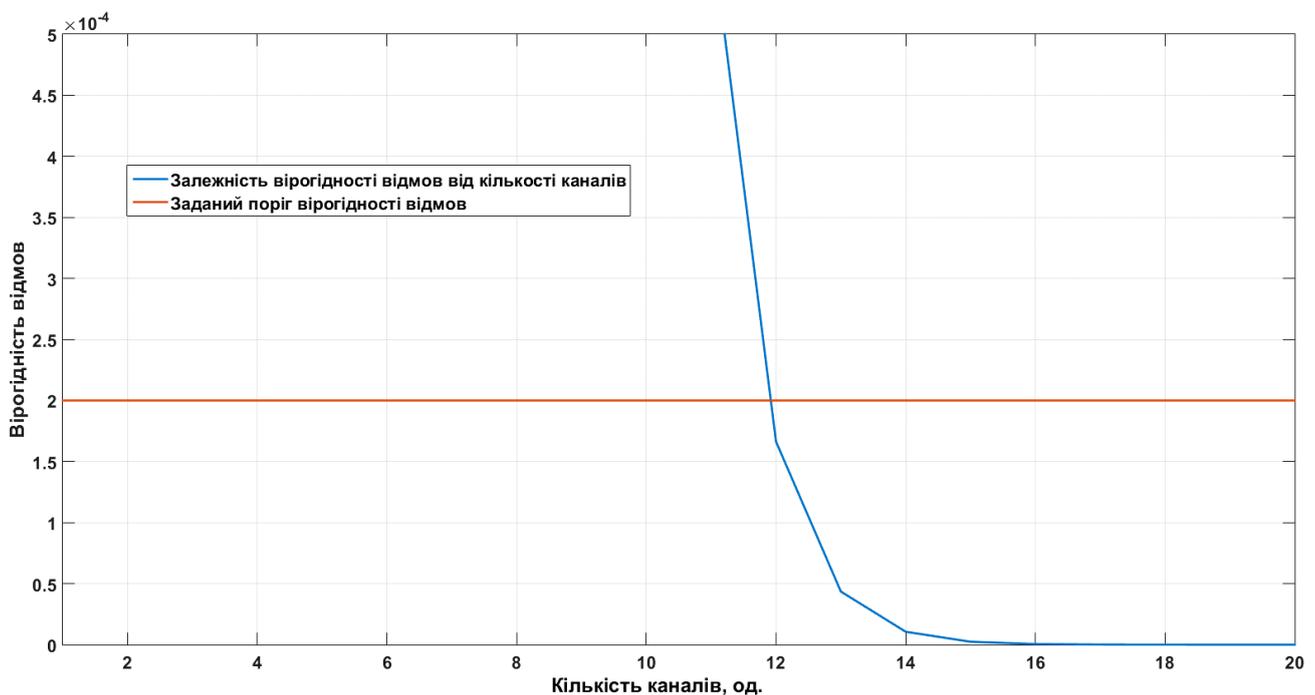


Рис. 1. Графічне розв'язання рівняння (1) щодо винайдення кількості каналів, що забезпечують потрібну вірогідність відмов для рядка 5 із таблиці

Як випливає з аналізу даних рис. 1, найменша необхідна кількість каналів, що забезпечує вимогу до якості зв'язку, становить 12. Це цілком узгоджується з даними таблиці. Перейдемо тепер до аналізу більших значень інтенсивності навантаження.

На рис. 2 зображено розв'язання першої формули Ерланга для рядка 7 із таблиці. Як відомо з цієї таблиці, в такому випадку інтенсивність навантаження становить 50,3 Ерл. при потрібній вірогідності відмов 0,01 %. І знову для цих початкових даних пряме застосування (1) дає правильний результат, який становить 64 канали.

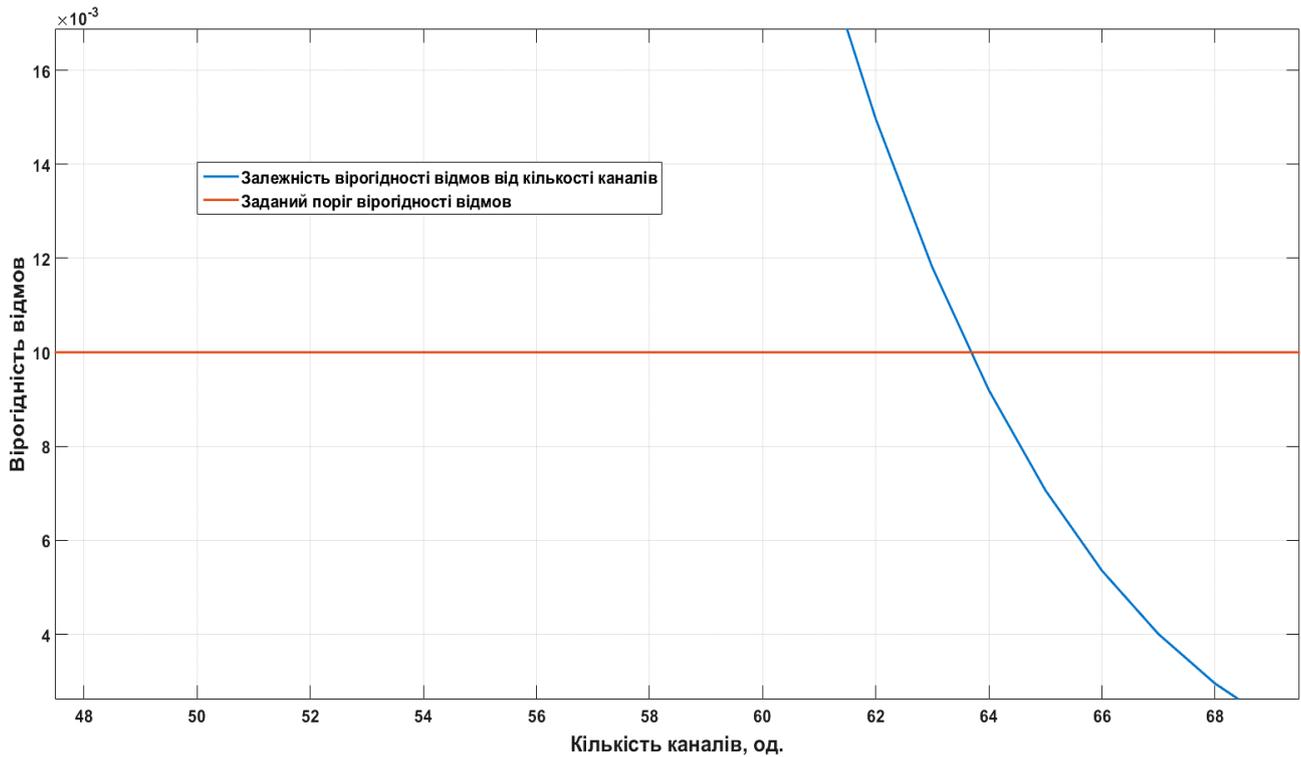


Рис. 2. Графічне розв'язання рівняння (1) щодо винайдення кількості каналів, що забезпечують потрібну вірогідність відмов для рядка 7 із таблиці

Тепер звернемо увагу на ще більші значення вхідних параметрів і розглянемо рядок 9 із таблиці. Графічне розв'язання (1) для цієї ситуації зображено на рис. 3.

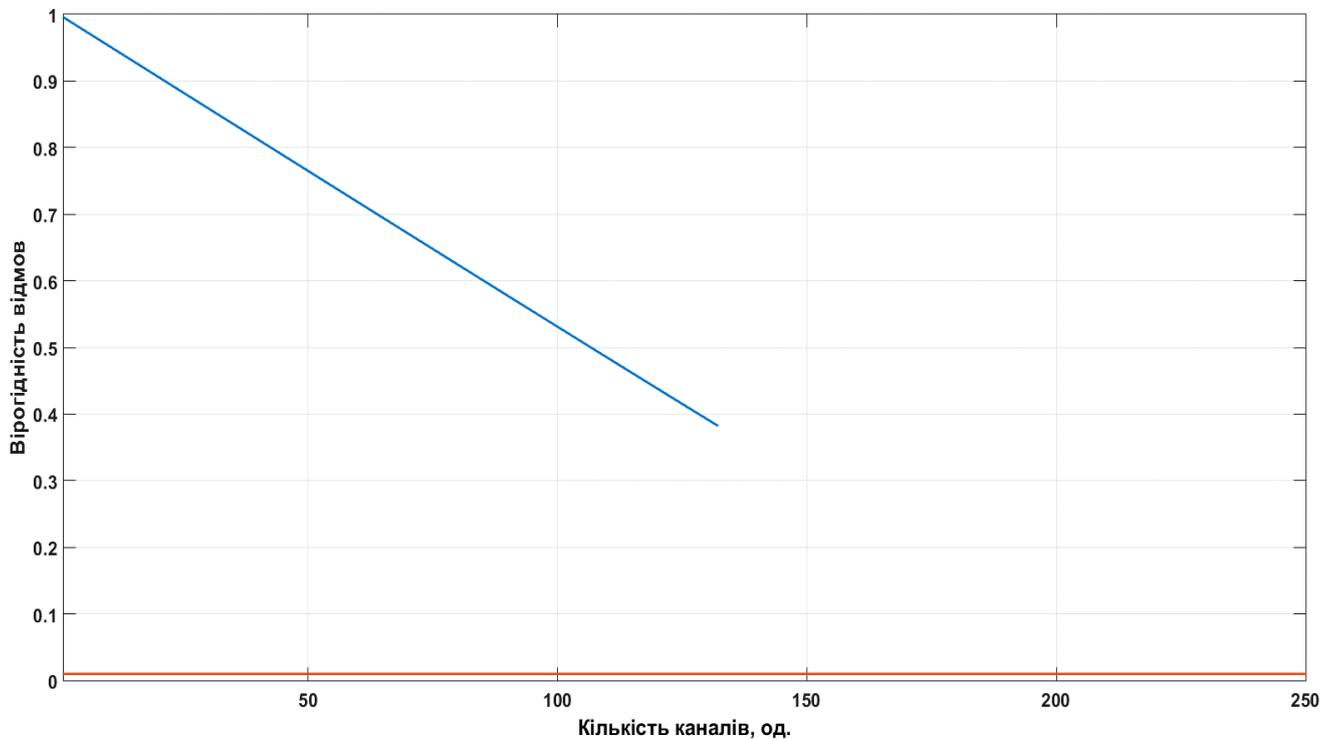


Рис. 3. Графічне розв'язання рівняння (1) щодо винайдення кількості каналів, що забезпечують потрібну вірогідність відмов для рядка 9 із таблиці

Аналіз даних із рис. 3 дозволяє стверджувати, що вже для інтенсивності навантаження 211,4 Ерл. і кількості каналів приблизно 130 шт., формула (1) у разі прямого її застосування в середовищі Matlab перестає працювати, що



пов'язано з переповненням розрядної сітки комп'ютера. Звісно ділянки 3, 4, 10 із таблиці, для яких значення інтенсивності навантаження є в рази більшими, не можуть бути обчислені взагалі.

Отже, у процесі проєктування телекомунікаційних мереж постає проблема з прямим застосуванням формули (1) для достатньо великих значень інтенсивності навантаження і кількості каналів у напрямку зв'язку. Для розв'язання проблеми запропоновано перетворення (1) таким чином, щоб запобігти переповненню розрядної сітки комп'ютера.

#### Методи

Щоб розв'язати сформульовану проблему, пропонується використати методи аналітичної алгебри й імітаційного комп'ютерного моделювання й аналізу складних систем.

Для отримання розв'язання поставленої проблеми проаналізуємо уважно (1). Застосуємо методи аналітичної алгебри. Перше, на що треба звернути увагу: ця формула є дуже зручною для рекурентних процедур, оскільки в ній наявна сума від 0 до кількості каналів  $n$ . Але, щоб реалізувати цю перевагу, треба поміняти місцями чисельник і знаменник і обчислити величину, зворотну обернену вірогідності відмов. З урахуванням цього зауваження, (1) можна переписати так:

$$\frac{1}{p_n} = \frac{\sum_{j=0}^n \frac{y^j}{j!}}{y^n / n!}. \quad (2)$$

Наступним спостереженням є те, що для будь-якої кількості каналів  $n$  знаменник у (2) завжди дорівнює останньому доданку суми в чисельнику (2). З огляду на це, (2) можливо представити як

$$\frac{1}{p_n} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^j}{j!} + \frac{y^n}{n!}}{\frac{y^n}{n!}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^j}{j!}}{\frac{y^n}{n!}} + \frac{y^n}{n!} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^j}{j!}}{\frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \frac{y}{n}} + 1 = \left\{ \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{y^j}{j!}}{\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}} \right\} \frac{1}{\frac{y}{n}} + 1 = \frac{1}{p_{n-1}} \frac{n}{y} + 1. \quad (3)$$

У формулі (3) враховано, що вираз у фігурних дужках, позначений як  $1/p_{n-1}$ , представляє величину, яка є зворотною для вірогідності відмов для  $n-1$  каналів зв'язку.

Отже, вираз (3) по суті є просто рекурентною формулою, що пов'язує вірогідність відмов для  $n$  каналів із вірогідністю відмов для  $n-1$  каналів через інтенсивність навантаження  $y$  та кількість каналів  $n$ , яка не може мати жодних проблем із переповненням розрядної сітки і не втрачає в точності розрахунків через перехід до обчислень із плаваючою точкою. Перевіримо це на практичних розрахунках у Matlab.

#### Результати

Для доведення ефективності отриманих рівнянь у проведенні обчислень, повернемося до невдалих розрахунків із прямим використанням (1), що зображені на рис. 3. Виконаємо обчислення із застосуванням отриманої рекурентної формули (3) для початкових умов ділянки 9 із таблиці. Графік, що відповідає цій ситуації, зображено на рис. 4.

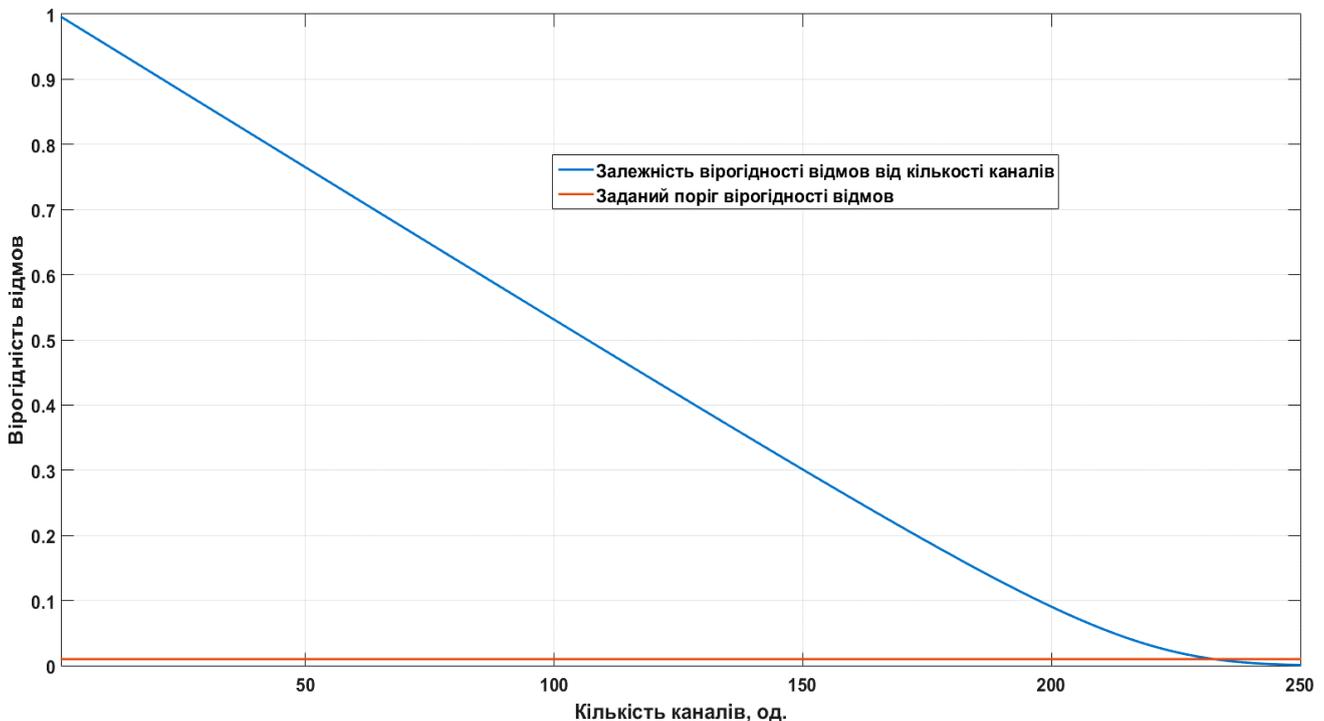


Рис. 4. Графічне розв'язання рівняння (3) щодо винайдення кількості каналів, що забезпечують потрібну вірогідність відмов для рядка 9 із таблиці



Як впливає з аналізу даних на рис. 4, жодних проблем із переповненням розрядної сітки комп'ютера не впливає і результат становить приблизно 235 каналів. Для встановлення точного значення кількості каналів, потрібно збільшити масштаб. Ту саму ситуацію, що і на рис. 4, але зі збільшеним масштабом, показано на рис. 5.

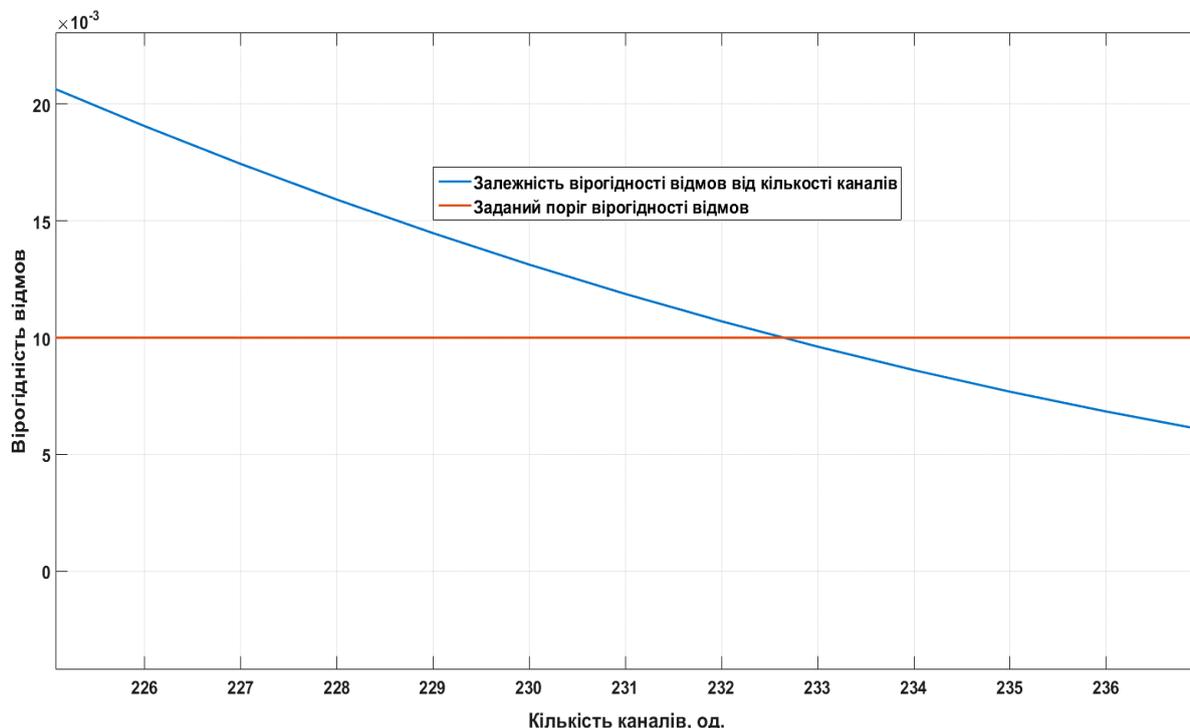


Рис. 5. Графічне розв'язання рівняння (3) щодо винайдення кількості каналів, що забезпечують потрібну вірогідність відмов для рядка 9 із таблиці у збільшеному масштабі

З аналізу кривих на рис. 5 випливає, що найменша кількість каналів, яка забезпечує потрібну якість зв'язку, дорівнює 233. Ці дані повністю збігаються з тими, що наведені в таблиці для рядка 9.

Для остаточної перевірки алгоритму (3) використаємо його для розрахунку кількості каналів для ділянки 3 з таблиці, для якої інтенсивність навантаження є найбільшою – 800 Ерл. Такі дані зображено на рис. 6.

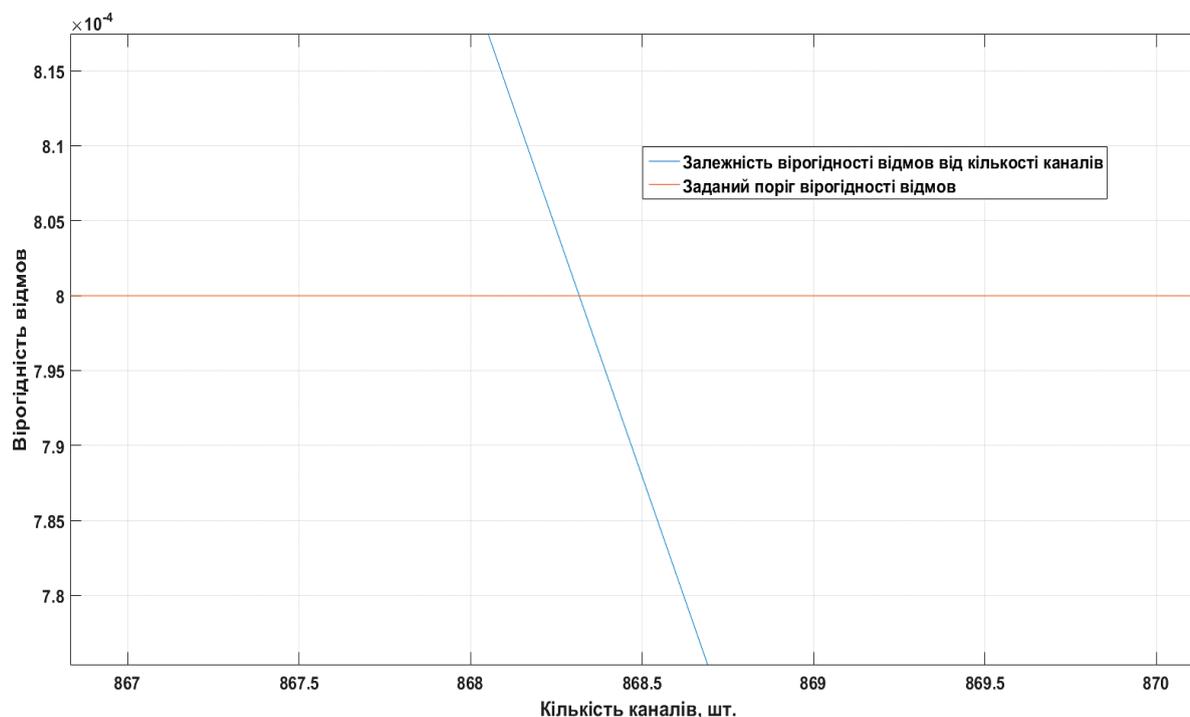


Рис. 6. Графічне розв'язання рівняння (3) щодо винайдення кількості каналів, що забезпечують потрібну вірогідність відмов для рядка 3 з таблиці у збільшеному масштабі



Аналіз даних рис. 6 демонструє, що навіть для таких великих значень кількості каналів й інтенсивності навантаження розроблений рекурентний алгоритм (3) демонструє гарну працездатність і отримана кількість каналів – 869, збігається з даними таблиці.

#### Висновки

Розглянуто використання першої формули Ерланга для обчислення потрібної кількості каналів у напрямку зв'язку для забезпечення необхідної вірогідності відмови. Під час досліджень встановлено, що у разі прямої практичної реалізації першої формули Ерланга в середовищі Matlab, на комп'ютері виникають переповнення розрядної сітки комп'ютера навіть для помірних значень кількості каналів та інтенсивності навантажень. Для розв'язання виявленої проблеми проведено детальний аналіз першої формули Ерланга і на її основі синтезовано рекурентний алгоритм, що усуває виявлені недоліки. Розроблений алгоритм є простим, зручним і у розрахунках показав свою ефективність навіть для найбільших значень інтенсивності навантажень і кількості каналів. Розроблений рекурентний алгоритм може широко використовуватись для проектування телекомунікаційних мереж і систем зв'язку.

**Внесок авторів:** Олександр Плющ – розроблення методів і методології дослідження, створення комп'ютерної програми; Юрій Кравченко – огляд літературних джерел, збір емпіричних даних і проведення емпіричних досліджень; Олександр Труш – опис результатів і написання висновків.

#### Список використаних джерел

- Алієв, Т. І. (2011). *Мережі ЕОМ і телекомунікації*. Університет інформаційних технологій, механіки та оптики.  
Гольдштейн, Б. С., Соколов, Н. А., & Яновський, Г. Г. (2010). *Мережі зв'язку*. БХВ.  
Давидов, А. Е., Смирнов, П. І., & Парамонов, А. І. (2016а). *Проектування телекомунікаційних систем та мереж: Мережі зв'язку що комутуються. Розрахунок параметрів і аналіз трафіку*. Університет інформаційних технологій, механіки та оптики.  
Давидов, А. Е., Смирнов, П. І., & Парамонов, А. І. (2016б). *Проектування телекомунікаційних систем та мереж: Лабораторні дослідження мереж зв'язку і передачі даних*. Університет інформаційних технологій, механіки та оптики.  
Зелігер, Н. Б., Чугреев, О. С., & Яновський, Г. Г. (1984). *Проектування мереж та систем передачі дискретних повідомлень*. Радіо та зв'язок.  
Клейнрок, Л. (1979). *Теорія масового обслуговування*. Машинобудування.  
Лівшиць, Б. С., Пшенічний, А. П., & Харкевіч, А. Д. (1979). *Теорія телетрафіку*. Зв'язок.  
Степков, В. К., & Беркман, Л. Н. (2002). *Проектування телекомунікаційних мереж*. Техніка.

#### References

- Aliev, T. I., (2011). *Networks of computers and telecommunications*. Information Technologies, Mechanics and Optics University [in Ukrainian].  
Davydov, A. E., Smirnov, P. I., & Paramonov, A. I. (2016a). *Telecommunication Systems and Networks Design. Laboratory Studies of Networks of Communication and Data Transfer*. Information Technologies, Mechanics and Optics University [in Ukrainian].  
Davydov, A. E., Smirnov, P. I., & Paramonov, A. I. (2016b). *Telecommunication Systems and Networks Design: Switched Networks of Communication. Parameters Calculation and Traffic Analysis*, Information Technologies, Mechanics and Optics University [in Ukrainian].  
Goldstein, B. S., Sokolov, N. A., & Yanovskiy, G. G. (2010). *Communication Networks*. BKhV [in Ukrainian].  
Kleinrok, L. (1979). *Queueing Theory*. Mashinobudovanya [in Ukrainian].  
Livshits, B. S., Pshenichniy, A. P. & Kharkevich, A. D. (1979). *Teletraffic Theor. Zvyazok* [in Ukrainian].  
Steklov, V. K., & Berkman, L. N. (2002). *Telecommunication networks design*. Tekhnika [in Ukrainian].  
Zeliger, N. B., Chugreev, O. S., & Yanovskiy, G. G. (1984). *Design of the networks and systems of discreet messages transmission*. Radio and Zvyazok [in Ukrainian].

Отримано редакцією журналу / Received: 05.11.22

Прорецензовано / Revised: 16.11.22

Схвалено до друку / Accepted: 22.11.22

Oleksandr PLIUSHCH, DSc (Engin.), Assoc. Prof.  
ORCID ID: 0000-0001-5310-0660  
e-mail: oleksandr.pliushch@knu.ua  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Yurii KRAVCHENKO, DSc (Engin.), Prof.  
ORCID ID: 0000-0002-0281-4396  
e-mail: yurii.kravchenko@knu.ua  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleksandr TRUSH, PhD (Engin.), Assoc. Prof.  
ORCID ID: 0000-0002-4188-2850  
e-mail: oleksandr.trush@knu.ua  
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

## RECURRENT ALGORITHM OF TELECOMMUNICATION SYSTEMS AND NETWORKS DESIGN

**Background.** The Erlang B-formula that establishes a relationship between probability of dropped calls, call intensity in a certain link and available communication channels in this link is widely used in telecommunication networks' design and calculations. In a great number of applications, a problem emerges of finding required number of channels in a link for set call intensity to satisfy required probability of dropped calls.

**Methods.** Methods of computer simulation as well as complex systems analysis.

**Results.** With account of the fact that the number of channels enters Erlang B-formula, firstly, as upper index of summation, secondly, exponent of the exponent function and, thirdly, in the factorial, the solution of the problem is possible graphically. This approach includes calculation of the dropped calls probability for a certain range of numbers of channels to determine the first channel' number for which dropped call probability results in a value below the threshold. The paper shows that for big values of the number of channels and call intensity direct use of Erlang B-formula on a computer leads to quick bit grid overflow and inability to fulfill required calculations. To overcome this problem, a recurrent algorithm is proposed to resolve the task, which is derived from Erlang B-formula and due to its structure does not suffer from the above limitations while performed on a computer.

**Conclusions.** Research results of the proposed algorithm demonstrate its high efficiency in implementation in Matlab environment. It is thought that the algorithm can find wide application in telecommunication networks design.

**Keywords:** telecommunication network, Erlang B-formula, recurrent algorithm, Matlab.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.