



УДК 004.942

DOI: <https://doi.org/10.17721/AIT.2021.1.04>

М. В. Пирог, orcid.org/0000-0003-2588-6066,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
І. І. Гарко, orcid.org/0000-0003-0671-6336,
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, Київ, Україна,
К. К. Духновська, orcid.org/0000-0002-4539-159X,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Моделювання термофізіологічного стану людини

Наведено аналіз математичних моделей, які можна використати для прогнозування термофізіологічного стану людини в різних умовах навколишнього середовища у процесі розроблення інформаційних систем її життєзабезпечення. Базисним елементом всіх розглянутих моделей є рівняння теплового балансу. Відповідно до цього рівняння сумарна тепловіддача організму має дорівнювати його теплопродукції. Усі величини рівняння теплового балансу можуть бути визначені спеціальними експериментами або за допомогою аналітичних методів, розроблених на основі класичної теорії термодинаміки. Розглянуто континуальні та дискретно-судинні моделі, проаналізовано їхні переваги та недоліки. Континуальні моделі є, по суті, спрощеним записом біотеплових рівнянь. У цих моделях впливом кровотоку кожної окремої судини нехтують, кровопостачання осереднюється за досліджуванним об'ємом. Дискретно-судинні моделі є сукупністю біотеплових рівнянь, що описують кровоток у кожній окремій судині. Дискретно-судинні моделі термофізіологічного стану людини нині малозастосовні, що пов'язано зі складною і не досить дослідженою геометрією судин. Більше використовують континуальні моделі, для побудови яких застосовують мультикомпаратментальний підхід.

У результаті у статті наведено порівняльну таблицю континуальних моделей та інформаційних систем, які використовують ці моделі.

Ключові слова: термофізіологічний стан людини, теплообмін, математичне моделювання, інформаційні системи.

Для цитування (for citation): М. В. Пирог, І. І. Гарко, К. К. Духновська. “Моделювання термофізіологічного стану людини,” *Сучасні інформаційні технології*, vol. 1, p. 30–38, 2021.

ВСТУП

Усі функціональні системи організму людини тією чи іншою мірою мають захисну реакцію на впливи зовнішнього середовища. Розвиток медичної кібернетики, прикладної математики та обчислювальних методів створили передумови для побудови інформаційних технологій для аналізу стану організму під впливом зовнішнього середовища. Математичні моделі функціональних систем організму та їхній комп'ютерний аналіз, безумовно, доповнюють систему експериментальних і клінічних даних, що отримується традиційними для фізіології і медицини методами.

За останні півстоліття зусиллями співдружності математиків, фізиків і фізіологів побудовано марематичні моделі практично всіх

досліджуваних функціональних систем організму людини. Дослідженню різних аспектів моделювання стану людини присвячено роботи таких авторів: І. Й. Єрмакова, К. Г. Лябах, F. d'Ambrosio, V. Candas, Fiala, D. L. Fogt, C. Huizenga, S. Tanabe.

Однією з актуальних проблем у галузі розроблення систем життєзабезпечення є забезпечення теплового комфорту для людини в межах системи «людина – довкілля», зокрема, це відноситься до задачі захисту людини від переохолодження, перегріву або зневоднення. Експериментальні дослідження в такому широкому діапазоні параметрів навколишнього середовища по фазовому стану, температурі й тиску вкрай трудомісткі і часто пов'язані з небезпекою для здоров'я та життя його учасників.

© Пирог М. В., Гарко І. І., Духновська К. К., 2021



Одним із варіантів розв'язання цієї задачі є розроблення моделей процесів теплообміну в системі «людина – довкілля», які дозволяють проводити широкий комплекс досліджень без експериментів над людьми.

Кожна модель функціональних систем описується властивими їй специфічними параметрами, які оцінюють стан указаної функціональної системи. У цій статті проведено аналіз термофізіологічних моделей, оскільки температура тіла людини є основним показником її здоров'я.

РІВНЯННЯ ТЕПЛООВОГО БАЛАНСУ ЛЮДИНИ ЯК БАЗИСНИЙ ЕЛЕМЕНТ МОДЕЛЕЙ

Регульовану постійність внутрішнього середовища живого організму називають гомеостазом [1]. Термін характеризує динамічну сталість у підтримці різноманітних констант організму: температури тіла, складу крові, кров'яного тиску тощо. До найдосконаліших гомеостатичних механізмів в організмі людини належать процеси терморегуляції. Сталість температури може зберігатися лише за умови рівності теплоутворення і тепловіддачі. Це досягається за допомогою фізіологічних механізмів теплообміну. Організм людини є складною біологічною саморегулюючою системою, що перебуває у стані безперервного теплового обміну із середовищем, в якому він міститься, і до цієї системи можуть бути застосовані перший і другий закони термодинаміки. Для збереження сталої температури тіла вся система має перебувати в термостабільному стані. Для визначення рівності між теплоутворенням в організмі та тепловіддачею використовують термін «тепловий баланс».

Теплового балансу досягають організацією і управлінням процесів, спрямованих на утворення теплоти в організмі (телопродукція) і його виведення (теповіддача) [2].

Нехай Q – це кількість внутрішньої енергії (теплоти), яку має тіло за даної температури T . Цю енергію прийнято називати ентальпією.

Відповідно до першого закону термодинаміки (закону збереження енергії) сумарна тепловіддача організму повинна дорівнювати його теплопродукції, тому рівняння теплового балансу є таким [2]:

$$Q = M - Q^R + Q^C + Q^K + Q^b + Q^E, \quad (1)$$

де Q – зміна температурного поля організму відносно комфортного рівня; M – метаболізм людини; Q^R – втрата теплоти радіацією; Q^C – втрата теплоти конвекцією; Q^K – втрата теплоти кон-

дукцією; Q^b – перенесення теплоти кров'ю; Q^E – втрата теплоти випаровуванням.

Усі величини рівняння теплового балансу можуть бути визначені спеціальними експериментами або за допомогою аналітичних методів, розроблених на основі класичної теорії термодинаміки.

До одного із чинників вироблення теплоти в організмі людини належить метаболізм. Він відповідає за підтримання сталої температури тіла людини, здійснення роботи, росту і розвитку організму та забезпечення структури і функцій усіх клітинних елементів.

У результаті окиснювально-відновлювальних реакцій в організмі людини відбувається перетворення речовин, багатих енергією, на речовини, що містять менший енергетичний потенціал, зі звільненням енергії в тій чи іншій формі [3]. Метаболізм у різних тканинах проходить із різною швидкістю. Швидкість метаболізму також залежить від віку людини.

У навколишнє середовище людина віддає теплоту різними шляхами: радіацією, конвекцією, випаровуванням, диханням. Тепловіддача радіацією залежить від температури тіла, одягу та навколишніх поверхонь, їхньої площі тощо. Причому теплообмін може йти як із позитивним, так і з негативним тепловим балансом для людини. Позитивний радіаційний тепловий баланс спостерігається, коли середня температура поверхонь, що оточують людину, вища температури поверхні її тіла. У цьому випадку за рахунок інфрачервоного випромінювання тіло людини нагрівається. Негативний радіаційний тепловий баланс спостерігається, коли середня температура поверхонь, що оточують людину, нижча температури поверхні його тіла. Тепловіддача радіацією може бути визначена за різними рівняннями: Стефана – Больцмана, Вітте, Фагнера. Для практичних розрахунків використовують рівняння Стефана – Больцмана [3]:

$$Q^R = h^R A_{\text{рад}} (T_1 - T_2), \quad (2)$$

де h^R – коефіцієнт тепловіддачі радіацією; $A_{\text{рад}}$ – площа поверхні тіла, що бере участь у радіаційному теплообміні; T_1, T_2 – температури тіл, що беруть участь у радіаційному теплообміні.

Тепловіддача конвекцією визначається на основі закону Ньютона – Ріхмана за рівнянням [3]:

$$Q^C = h^C A_C (T_1 - T_2), \quad (3)$$

де h^C – коефіцієнт тепловіддачі конвекцією; A_C – площа поверхні тіла, що бере участь у конвекційному теплообміні; T_1, T_2 – температури



тіл, що беруть участь у конвекційному теплообміні.

Тепловіддача кондукцією визначається за законом Фур'є [4]:

$$Q^K = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\sigma} S \tau, \quad (4)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності; T_1, T_2 – температура внутрішньої і зовнішньої сторін пакетів матеріалів; σ – товщина тканини; S – площа поверхні, що стикається з іншою поверхнею; τ – час стикання.

У звичайних умовах втрати теплоти кондукцією невеликі, оскільки невелика площа дотику тіла з іншими поверхнями. Людина втрачає теплоту кондукцією з поверхні підошов, площа яких становить 3 % усієї поверхні тіла. Унаслідок цього тепловіддача кондукцією не має великого значення і нею можна знехтувати.

Втрати теплоти випаровуванням мають велике значення в умовах перегрівання організму і в разі виконання людиною фізичної роботи [3]:

$$Q^E = Q_{\text{вип.диф.}} + Q_{\text{вип.дих.}} + Q_{\text{вип.п.}} + Q_{\text{дих.н.}}, \quad (5)$$

де $Q_{\text{вип.диф.}}$ – втрата теплоти внаслідок випаровування дифузійної вологи з поверхні шкіри; $Q_{\text{вип.дих.}}$ – втрата теплоти внаслідок випаровування вологи з верхніх дихальних шляхів; $Q_{\text{вип.п.}}$ – втрата теплоти внаслідок випаровування поту; $Q_{\text{дих.н.}}$ – втрата теплоти під час нагрівання повітря, що вдихається.

Тепловіддача, особливо за високої температури повітря, може здійснюватися шляхом випаровування дифузійної вологи з поверхні шкіри та верхніх дихальних шляхів. Швидкість випаровування вологи з поверхні тіла залежить від різниці парціальних тисків пари у прикордонному шарі близько шкіри та в навколишньому повітрі; швидкості повітря; повітро- і паропроникнення одягу; площі поверхні, зволоженої потом. Втрати теплоти шляхом випаровування дифузійної вологи з поверхні шкіри можна визначити за рівнянням [3]:

$$Q_{\text{вип.диф.}} = 3.06 \cdot 10^{-3} S (256T_{\text{ш}} - 3360 - p_a), \quad (6)$$

де S – площа поверхні тіла людини; $T_{\text{ш}}$ – температура шкіри; p_a – парціальний тиск, який приймають рівним 2660 Па.

Повітря, що вдихається, у процесі проходження по дихальних шляхах зволожується за рахунок випаровування вологи зі слизового шару. Під час виходу водяна пара частково конденсується, тому повітря, що видихається, містить більше вологи, ніж те, що вдихається. Втрати теплоти при випаровуванні вологи з верхніх дихальних шляхів можна визначити з рівняння [3]:

$$Q_{\text{вип.д.}} = 14.9 \cdot 10^{-6} Q_{\text{тп}} (5880 - p_a), \quad (7)$$

де $Q_{\text{тп}}$ – теплопродукція людини.

Величина потовиділення багато в чому визначається рівнем фізичної активності, умовами та ступенем відповідності одягу умовам зовнішнього середовища. Основними показниками навколишнього середовища, що впливають на величину тепловтрат за рахунок випаровування поту, є відносна й абсолютна вологість. Відносна вологість визначає інтенсивність випаровування вологи з поверхонь, зокрема і з поверхні людського тіла, та визначається таким чином [3]:

$$\varphi = \frac{e}{E_{\text{ф}}} \cdot 100\%, \quad (8)$$

де e – напруга водяної пари в повітрі (абсолютна вологість); $E_{\text{ф}}$ – максимально можлива напруга водяної пари при температурі повітря.

Величину потовиділення (втрати теплоти за рахунок випаровування поту) можна визначити за формулою Н. К. Вітте [7]:

$$Q_{\text{вип.}} = 17.3(E_{\text{ф}} - e)(0.5 + \sqrt{V_{\text{п}}}), \quad (9)$$

де $V_{\text{п}}$ – об'єм поту.

Комфортний рівень тепловіддачі випаровуванням $Q_{\text{вип.к.}}$ визначається з рівняння [3]:

$$Q_{\text{вип.к.}} = 0.36S \left(\frac{Q_{\text{тп}}}{S} - 58 \right), \quad (10)$$

де S – площа поверхні тіла людини.

Втрати теплоти диханням визначають за рівнянням Фігнера [3]:

$$Q_{\text{дих.}} = 0.0012 Q_{\text{ет}} (34 - T_{\text{п}}), \quad (11)$$

де $Q_{\text{ет}}$ – енерговитрати людини; $T_{\text{п}}$ – температура повітря.

Розраховуючи втрати теплоти диханням слід приймати температуру повітря, що видихається: при високій температурі навколишнього середовища – 36 °С; при середній температурі навколишнього середовища – 34 °С; при низькій температурі навколишнього середовища – 30 °С.

Отже, головними чинниками температури тіла людини є метаболізм, конвекція, кондукція, радіація і втрати теплоти диханням і випаровуванням.

МУЛЬТИКОМПАРТМЕНТАЛЬНІ МОДЕЛІ ТЕПЛООБМІНУ ЛЮДИНИ

Майже всі інформаційні технології моделювання термофізіологічного стану людини використовують мультикомпаратментальну модель теплообміну людини.

За означенням, наведеним у [4], компартмент – це певна кількість речовини, що виділяється в біологічній системі та має властивість єдності, тому у процесах транспортування і хімічних перетворень її можна розглядати як одне ціле. Моделі, в яких досліджувана система представляється у вигляді сукупності компартментів, називають мультикомпаратментальними.

Клас мультикомпаратментальних динамічних моделей теплообміну і терморегуляції людини



описує теплопродукцію в органах і тканинах, теплоперенесення кровотоком, кондукцію, конвекцію, випромінювання, випаровування зі шкіри та верхніх дихальних шляхів, аферентні та еферентні терморегуляторні процеси.

В основі структури моделей міститься компартмент. Він має джерело енергії, здатність приймати й віддавати енергію іншим компартментам та обмінюватися нею із середовищем. Набір компартментів і формування відношень між ними задають ступінь апроксимації тіла людини. Кожен компартмент відповідає певній частині тіла або тканині організму. Апроксимація тіла людини може проводитися на довільну кількість геометричних частин.

АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ ТЕРМОФІЗІОЛОГІЧНОГО СТАНУ ЛЮДИНИ

Завдання моделювання термофізіологічного стану людини зводиться до розроблення математичної моделі теплового режиму з урахуванням усіх присутніх факторів середовища, специфіки професійної діяльності та фізіології людини.

Теплообмін у живій тканині виключає точне математичне моделювання, оскільки є складним процесом, що містить теплопровідність у тканинах, конвекцію та перфузію крові, а також генерацію метаболічної теплоти. Нині для опису теплопередачі всередині живих тканин розроблено багато математичних моделей, що використовуються в різних галузях біології та медицини. Однак основою побудови більшості відомих моделей перенесення біотеплоти є два базові підходи: континуальний і дискретно-судинний. Континуальні моделі є, по суті, спрощеним записом біотеплових рівнянь. У цих моделях впливом кровотоку кожної окремої судини нехтують, кровопостачання усереднюється за досліджуваним об'ємом. Дискретно-судинні моделі є сукупністю біотеплових рівнянь, що описують кровоток у кожній окремій судині та дозволяють прогнозувати розподіл температури [4].

Найбільшого поширення набула дискретно-судинна модель васкуляризованої тканини, запропонована в [5]. Модель базується на чотирьох припущеннях:

- теплообміном між кров'ю та тканиною в преартеріолах і поственулах нехтують;
- потік крові у дрібних капілярах вважають ізотропним, напрямком кровотоку нехтують;
- великі кровоносні судини в безпосередній близькості від капілярного русла не вносять вклад в обмін енергією між тканиною та капілярною кров'ю (іншими словами, ця модель не враховує локальну геометрію судин);
- температура крові в артеріолах, що поста-чають капілярне русло, дорівнює температурі ядра тіла [5].

Обмін енергією відбувається миттєво: температура крові врівноважується температурою тканини, базуючись на цих припущеннях, у [6] змодельовано вплив крові як ізотропного джерела теплоти, пропорційного швидкості потоку крові та різниці між температурою тіла і локальною температурою тканини. По суті, модель, яку описано в [5], є класичним біотепловим рівнянням, що враховує вплив кровотоку та метаболічної теплоти на баланс енергії у тканині (рівняння Пеннеса):

$$\rho_{ti} C_{ti} \frac{dT_{ti}}{dt} =$$

$$= \nabla(k_{ti} \nabla T_{ti}) + \rho_b C_b W_b (T_{art} - T_{ti}) + q_m, \quad (12)$$

де ρ_{ti} – густина тканини; C_{ti} – теплоємність тканини; T_{ti} – температура тканини; k_{ti} – теплопровідність тканини; ρ_b – щільність крові; C_b – теплоємність крові; W_b – швидкість перфузії крові; T_{art} – температура артеріальної крові; q_m – метаболічна теплота.

Генерацію метаболічної теплоти, що розглядається в цій моделі, передбачають однорідно розподіленою по всій тканині, перфузію крові також вважають однорідною та ізотропною. Згідно з моделлю [5] теплова рівновага виникає безпосередньо в капілярній ланці мікроциркуляторного русла (кров при артеріальній температурі надходить у капіляри, де відбувається теплообмін, температура знижується до температури тканини). Температура, з якою кров входить у венозний кровообіг, дорівнює локальній температурі тканини [5].

Однак, варто звернути увагу на недоліки такої моделі:

- теплообмін між кров'ю та тканиною відбувається не лише в капілярах, навпаки, він спостерігається також у преартеріолярних та поственулярних судинах, що мають діаметри в діапазоні 70–500 мкм;
- напрямком кровотоку є важливим фактором, що впливає на обмін енергією між судинами та тканиною, однак рівняння Пеннеса не враховує цей чинник;
- рівняння Пеннеса не враховує також локальну геометрію судин (обмін енергією з великими судинами, передачу теплоти у протиток між парами артерія-вена та розгалуження-звуження судин);
- температура артеріальної крові безперервно змінюється від аорти до артерій та в артеріолах, а також далі в системі венозного відтоку.

Таким чином, температура крові в артеріолах не дорівнює температурі ядра тіла, а температура венозної крові не дорівнює локальній температурі тканини. Зазначені наближення переоцінюють



вплив кровотоку на локальну температуру тканини. Нехтування впливом різної направленості потоків крові в [5] призводить до суттєвих помилок під час обчислення результатів.

Для виправлення зазначеного недоліку в [7] припущено, що поле теплообміну всередині тканини має бути змодельоване на основі природних умов судинної анатомії. З урахуванням просторових і часових варіацій швидкості (v), джерела метаболічної теплоти (q_m), сталості

$$\rho_{ti,eff} C_{ti,eff} \frac{\partial T_{ti}}{\partial t} = \nabla(k_{ti,eff} \nabla T_{ti}) - (\rho_b C_b W^* (T_{art} - T_{ti}) - \rho_b C_b v \nabla(T_{ti}) + \nabla(k_p \nabla T_{ti})) + q_m, \quad (14)$$

де k_p – провідність перфузії,

$$\rho_{ti,eff} = (1 - \varepsilon_b) \rho_{ti} + \varepsilon_b \rho_b, \quad C_{ti,eff} = (1 - \varepsilon_b) C_{ti} + \varepsilon_b C_b, \quad k_{ti,eff} = (1 - \varepsilon_b) k_{ti} + \varepsilon_b k_b,$$

тут ε_b – пористість тканини, через яку рухається кров.

Модель, що описана в [8], досить складно застосувати на практиці, оскільки потрібна наявність детальних відомостей про судинну мережу та перфузію крові. У моделі, так само як у всіх континуальних моделях, найбільша увага приділяється теплообміну між кровоносною судиною та навколишньою тканиною. З огляду на різниці температур і близьке розташування венозних і артеріальних кровоносних судин, масмо також і теплообмін у зустрічному потоці, але це у моделі не враховується.

У [9] представлено нову судинну біотеплову модель, в якій береться до уваги зустрічний потік крові. Цю модель отримано на основі припущення, що невеликі артерії та вени паралельні, а напрямок потоків протилежний. Таке припущення може бути застосовано, в основному, для проміжних шарів шкіри. В анатомічному дослідженні, проведеному на кінцівках кролика, в [9] визначено три судинних шари (глибокий, середній і шкірний) у зовнішньому шарі тканини глибиною 1 см.

Припущення для моделі, описаної в [12], такі:

- лімфатичною втратою рідини нехтують, таким чином, масові витрати в артерії та у вени рівні;
- кровоток просторово однорідний;
- теплопередача у площині, перпендикулярній до пари артерія-вена, більша, ніж уздовж судин;
- залежність температури в радіальному напрямку пари артерія-вена є лінійною;
- температура межі артерія-вена дорівнює середньому значенню температур артерії та вени;
- температура крові на виході з відвідних капілярів та на вході у вени дорівнює температурі венозної крові.

Модель, що подається у [12], така:

$$\rho_{ti} C_{ti} \frac{dT_{ti}}{dt} = \nabla(k_{eff} \nabla T_{ti}) + q_m, \quad (15)$$

де k_{eff} – ефективна теплопровідність, яка обчислюється так:

фізичних властивостей тканини біотеплове рівняння у [7] записано так:

$$\rho_{ti} C_{ti} \frac{dT_{ti}}{dt} = k_{ti} \nabla^2 T_{ti} + \rho_b C_b v \nabla(T_{ti}) + q_m. \quad (13)$$

Серед дискретно-судинних біотеплових моделей модель [8–10] є найбільше відпрацьованою. У [8] зроблено припущення, що загальний контрольний об'єм тканини доцільно розділити на підоб'єм обезкровленої тканини та підоб'єм крові, у результаті отримано рівняння:

$$k_{eff} = k_{ti}(1 + Pe_i V(\zeta)),$$

де $\zeta = \frac{x}{L}$ – безрозмірна відстань, що визначається; L – товщина шару тканини; $V(\zeta)$ – безрозмірна функція судинної геометрії, яка може бути обчислена, якщо є відомості про судини; Pe_i – число Пекле, яке визначається за такою формулою:

$$Pe_i = \frac{2\rho_b C_b r_i v_i}{k_b},$$

де r_i – радіус судини;

v_i – швидкість крові на вході в шар тканини.

Така модель вимагає багато докладних відомостей про анатомію та судинну геометрію, наприклад, щільність судини, розмір і відстань між артерією та веною для кожної судини цієї пари, а також швидкість перфузії крові. Це все ускладнює застосування такої моделі.

Серед континуальних моделей нині досить відомою є модель Fiala [13]. Відповідно до цієї моделі, серед складових системи виокремлюють такі: мозок, шия, грудна клітка, живіт, кінцівки. Тут кожен елемент складається з шарів: шкіра, жир, м'язи та кістки. Рівняння теплового балансу, що застосовується у цій моделі, має вигляд

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial^2 r} + \frac{w}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + q_m + \rho_b w_b C_b (T_{b,art} - T) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (16)$$

У моделі беруть участь потік крові, метаболічні реакції та місцевий теплообмін між людиною і середовищем [13].

У [14] наведено універсальну модель із зосередженими параметрами. Вона теж належить до дискретно-судинних моделей. У ній враховано потік крові, дихання, випаровування, метаболічні реакції, фізичне навантаження, пітливість, тремтіння, серцевий викид і місцевий теплообмін між людиною та середовищем. У



моделі також передбачено врахування наявності одягу та захисного спорядження. Тіло людини у цій моделі апроксимується заданою кількістю компартментів залежно від мети використання моделі для розв'язання задач із дослідження фізіології людини. На основі моделі із зосередженими параметрами створено модель для оцінювання впливу захисного спорядження на термофізіологічний стан людини [15], модель для оцінювання впливу електромагнітного поля радіочастотного й ультразвукового діапазону на гіпертермію [16], модель для визначення рівня температурного комфорту людини у приміщенні [17], модель для прогнозування теплового стану людини під час перебування у воді [18].

У роботах [14–18] для побудови математичної моделі кожен компартмент апроксимується матеріальною точкою з характеристиками цього компартмента, тобто характеристики компартмента «зосереджуються» в одній точці. У результаті отримуємо задачу Коші:

$$\begin{aligned} & c_{ij}m_{ij} \frac{dT_{ij}}{dt} + \Delta T_{ij} = \\ & = M_{ij}^* + M_{ij}^{ph} + M_{ij}^{sh} + Q_{ij-1}^K - Q_{ij}^K - Q_{ij}^b - Q_{ij}^{air} \quad (17) \\ V_b \rho_b c_b \frac{dT_b}{dt} & = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^Z w_{ij} \rho_b c_b T_{ij} - W \rho_b c_b T_b - Q^{RS}, \end{aligned}$$

де c – питома теплоємність; m – маса; T – температура; t – час; M – метаболізм; Q – тепловий потік; V – об'єм; W – серцевий викид.

Індекси:

ij – індекси компартментів; $*$ – початкове значення; b – кров; ph – фізична активність; RS – теплові втрати з диханням; sh – холодове тремтіння скелетних м'язів; K – кондукція; air – повітря.

До плюсів моделі потрібно віднести швидкість обчислень усіх температур компартментів людського тіла. Проте така модель не надає розподілу температур тіла людини у просторі, що не є правильним, вона дає лише середні температури компартментів. Щоб увести нове джерело теплоти, потрібно в цій моделі додавати новий компартмент, що призводить до модифікації інформаційної системи в цілому.

У [19] розглянуто модель із розподіленими параметрами. Температура тіла людини неоднакова на різних його ділянках. Тому в [19] введено температурне поле $T(x, y, z, t)$ – динамічна сукупність значень температури у всіх точках тіла людини. Швидкість зміни температури задано вектором:

$$\nabla(T) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right),$$

де $\nabla(T)$ – градієнт температури.

У результаті отримано систему диференціальних рівнянь у частинних похідних для прогнозування стану людини в екстремальних умовах:

$$\begin{aligned} & c_{ij}m_{ij} \frac{dT_{ij}}{dt} + \Delta T_{ij} = \\ & = M_{ij}^* + M_{ij}^{ph} + M_{ij}^{sh} + Q_{ij-1}^K - Q_{ij}^K - Q_{ij}^b - Q_{ij}^{air}, \quad (18) \\ V_b \rho_b c_b \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_{ij} \Delta T & = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{L-1} w_{ij} \rho_b c_b T_{ij} - W \rho_b c_b T_b - Q^{RS}, \end{aligned}$$

де Δ – оператор Лапласа.

Для розв'язання цієї системи необхідні додаткові умови: початкові та граничні.

Початкові умови визначають температури кожного компартмента та кожного шару в початковий час:

$$\text{при } t = t_0, T_{ij} = T_{ij}^0.$$

Для розв'язання цієї системи використовують граничні умови четвертого роду. Для сусідніх шарів умови повинні виконуватись на межі між ними. Наприклад: межа між циліндром, що апроксимує внутрішні органи, та циліндром, що апроксимує м'язи, одна й та сама та належить як до першого циліндру, так і до другого. Можемо написати, що температура або її градієнт на межі циліндра, що апроксимує внутрішні м'язи, дорівнює температурі, або її градієнту на межі циліндра, що апроксимує м'язи, тобто,

якщо $x \in G_x^{ij}$:

$$\begin{aligned} T_{xij} & = T_{xij-1}, \\ \frac{\partial T_{i,j}}{\partial x} & = \frac{\partial T_{i,j-1}}{\partial x}, \quad \forall t \geq 0, j \neq sk; \end{aligned}$$

якщо $y \in G_y^{ij}$:

$$\begin{aligned} T_{yij} & = T_{yij-1}, \\ \frac{\partial T_{i,j}}{\partial y} & = \frac{\partial T_{i,j-1}}{\partial y}, \quad \forall t \geq 0, j \neq sk; \end{aligned}$$

якщо $z \in G_z^{ij}$:

$$\begin{aligned} T_{zij} & = T_{zij-1}, \\ \frac{\partial T_{i,j}}{\partial z} & = \frac{\partial T_{i,j-1}}{\partial z}, \quad \forall t \geq 0, j \neq sk; \end{aligned}$$

де G_x^{ij} , G_y^{ij} , G_z^{ij} – проекції границі i -го компартмента j -го шару на координатні площини.

Для температури на границях між шарами, що апроксимують шкіру людини, і шаром повітря має виконуватись закон Фур'є:

для $j = sk, x \in G_x^{i,sk}$:

$$\frac{\partial T_{i,sk}}{\partial x} = a_{ij} h_{i,sk}^K (T_{i,sk} - T^{air}), \quad \forall t \geq 0;$$

для $j = sk, z \in G_y^{i,sk}$:

$$\frac{\partial T_{i,sk}}{\partial y} = a_{ij} h_{i,sk}^K (T_{i,sk} - T^{air}), \quad \forall t \geq 0;$$

для $j = sk, x \in G_z^{i,sk}$:

$$\frac{\partial T_{i,sk}}{\partial z} = a_{ij} h_{i,sk}^K (T_{i,sk} - T^{air}), \quad \forall t \geq 0.$$



У результаті отримано математичну динамічну модель термofізіологічного стану людини, яка може надати розподіл температур тіла людини у просторі.

Наведемо порівняльні характеристики моделей терморегуляції людини (таблиця).

ТАБЛИЦЯ.
ПОРІВНЯЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА
МОДЕЛЕЙ ТЕРМОРЕГУЛЯЦІЇ ЛЮДИНИ

Модель	Модель Fiala	Із зосередженими параметрами	Із розподіленими параметрами
Кількість компартментів	187	39	39
Дані, з якими може працювати модель	Електронний манекен	Електронний манекен	Дані реальної людини
Важелі впливу на зміни температур, які враховано	Потік крові, метаболічні реакції та місцевий теплообмін між людиною й середовищем, фізичне навантаження, одяг	Потік крові, дихання, випаровування, метаболічні реакції, фізичне навантаження, пітливість, тремтіння, серцевий викид, місцевий теплообмін між людиною й середовищем, одяг або захисне спорядження.	Потік крові, дихання, випаровування, метаболічні реакції, фізичне навантаження, пітливість, тремтіння, серцевий викид, місцевий теплообмін між людиною і середовищем, одяг або захисне спорядження.
Розподіл температур у просторі	Так	Ні	Так
Точність	1,63 °С	0,204 °С	1,3 °С
Час прогнозування	Відомості відсутні	Менше 1 хв	10 хв

ВИСНОВКИ

Проведено порівняння кількох математичних моделей для оцінювання стану терморегуляції в організмі. Математичне моделювання процесів терморегуляції реалізовано у програмній системі й експериментально досліджено на спеціалізованому манекені.

Представлені в поданій праці результати доводять ефективність розробленої математичної моделі, що відкриває можливості для подальшої роботи з її вдосконалення, розширення наборів експериментальних даних для аналізу та підвищення ефективності оцінювання стану організму.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Я. Гонський, Т. Максимчук, М. Калинський *Біохімія людини*, Тернопіль: Укрмедкнига, 2002.

[2] C. W. Sheppard, "The mathematical basis of the interpretation of tracer experiments in closed steady-state systems", *Journal of Applied Physics*, vol. 22, № 4, pp. 510–520, 1951.

[3] C. H. Wyndham, A. R. Atkins A physiological scheme and mathematical model of temperature regulation in man. *Pflügers Archiv*, vol. 303, pp. 14–30, 1968.

[4] И. Ермакова, «Механизмы физиологической терморегуляции у человека», автореф. дис. на соискание научной степени д-ра биол. наук, Киев, 1989.

[5] H. H. Pennes, "Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting forearm", *Journal of Applied Physiology*, vol. 1, № 2, pp. 93–122, 1948.

[6] E. H. Wissler, "Pennes 1948 paper revisited", *Journal of Applied Physiology*, vol. 85, № 1, pp. 35–41, 1998.

[7] H. G. Klinger, "Heat transfer in perfused biological tissue", *General theory. Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 36, pp. 403–415, 1974.

[8] M. M. Chen, K. R. Holmes, "Microvascular Contributions in Tissue Heat Transfer", *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, vol. 335, pp. 137–150, 1980.

[9] S. Weinbaum, L. M. Jiji, D. E. Lemons, "Theory and experiment for the effect of vascular microstructure on surface tissue heat transfer. Part I. Anatomical foundation and model conceptualization", *ASME Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 106, pp. 321–330, 1984.

[10] S. Weinbaum, L. M. Jiji, "A new simplified bioheat equation for the effect of blood flow on local average tissue temperature", *ASME Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 107, pp. 131–139, 1985.

[11] A. Bhowmik, "Conventional and newly developed bioheat transport models in vascularized tissues", *Journal of Thermal Biology*, vol. 38, № 3, pp. 107–125, 2013.

[12] А. А. Сагайдачный, "Восстановление спектра колебаний кровотока из спектра колебаний температуры пальцев рук, дисперсия температурного сигнала в биоткани", *Регионарное кровообращение и микроциркуляция*, №1, с. 76–82, 2013.

[13] K. Kubaha, D. Fiala, J. Toftum, Human projected area factors for detailed direct and diffuse solar radiation analysis. *International Journal of Biometeorology*, vol.49(2), pp. 113–129, 2004.

[14] І. Й. Ермакова, *Стан та перспективи розвитку інформатики в Україні*, Київ: Наукова думка, 2010.

[15] I.Yermakova, K.Dukhnovskaya, A.Nikolaienko, O.Troynikov, N.Nawaz, "Influence of exercise intensity on thermophysiological responses of firefighters wearing different firefighters protective clothing ensembles», *5th ESPC and Nokobetef 10. Future of protective clothing*, 2012. Pp. 75.

[16] И. И. Ермакова, Ю. П. Тадеева, Н. Г. Иванушкина, "Эффект региональной электромагнитной гипертермии: результаты моделирования", *Электроника и связь. Тематический выпуск "Проблемы электроники"*, № 1, с. 132–136, 2007.

[17] И. И. Ермакова, "Динамическая модель оценки температурного комфорта человека", *Электроника и связь. Тематический выпуск "Проблемы электроники"*, № 2, С. 81–85, 2008.

[18] А. Ю. Ніколаєнко, "Інформаційна технологія прогнозування термofізіологічного стану людини під час фізичної активності в різних середовищах", дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук, НАН України, Київ, 2019.

[19] Dukhnovska K. The boundary value problem for the heat transfer task between a human and the environment. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. вип. 30, стор. 29–40, 2020.

Стаття надійшла до редколегії

16.08.2021



Modeling of thermophysiological state of person

This article presents an analysis of mathematical models that can be used to predict the thermophysiological state of man in different environmental conditions in the development of information systems for its life support. The basic element of all considered models is the equation of heat balance. According to this equation, the total heat transfer of the organism must be equal to its heat output.

The article considers continuous and discrete-vascular models, analyzes their advantages and disadvantages. Continuous models are, in essence, a simplified notation of biothermal equations. In these models, the effect of blood flow on each individual vessel is neglected, and the blood supply is averaged over the volume studied. Discrete-vascular models are a set of biothermal equations that describe the blood flow in each individual vessel. Discrete-vascular models of the thermophysiological state of man are not very applicable today, due to the complex and insufficiently studied vascular geometry. More common are continuum models, for the construction of which a multi-compartmental approach is used.

As a result, the article presents a comparative table of continuous models and information systems that use these models.

Keywords: *mathematical modeling, heat transfer, information systems, thermophysiological state of man.*



Микола Пирог. Закінчив факультет інформаційних систем і технологій Приватного вищого навчального закладу «Європейський університет», Київ, Україна. Працює асистентом на кафедрі прикладних інформаційних систем факультету інформаційних технологій Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Наукові інтереси: інформатизація суспільства, електронне урядування, agile-методології у програмуванні й освіті.

Mykola Pyroh. He graduated from the Faculty of Information Systems and Technologies of the Private Higher Educational Institution "European University". He works as an assistant at the Department of Applied Information Systems of Faculty of Information Technology of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Kyiv, Ukraine. Research interests: informatization of society, e-government, agile-methodologies in programming and education.



Ксенія Духновська. Закінчила механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Працює на кафедрі прикладних інформаційних систем факультету інформаційних технологій Київського національного університету імені Тараса Шевченка на посаді асистента, Київ, Україна. Наукові інтереси: медична кібернетика, NLP.

Ksenia Dukhnovska. She graduated from the Faculty of Mechanics and Mathematics of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Works at the Department of Applied Information Systems of Faculty of Information Technology of Taras Shevchenko National University of Kyiv as an assistant. Kyiv, Ukraine. Research interests: medical cybernetics, NLP.



Ірина Гарко. Закінчила фізико-математичний факультет Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Працює доцентом кафедри прикладних інформаційних систем факультету інформаційних технологій Київського національного університету імені Тараса Шевченка, канд. фіз.-мат. наук, Київ, Україна. Наукові інтереси: теорія ймовірностей і математична статистика, фрактальний аналіз, системи числення, agile-методології у програмуванні й освіті.

Iryna Harko. Candidate of Physical and Mathematical Sciences. She graduated from the Faculty of Physics and Mathematics of the National Pedagogical University named after M.P. Drahomanov. Works as an associate professor of the Department of Applied Information Systems of Faculty of Information Technology of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Kyiv, Ukraine. Research interests: probability theory and mathematical statistics, fractal analysis, number systems, agile methodologies in programming and education.